

REU 2026 TOPICS

March 12, 2026

Research topics

1 Sumsets of dilates

At the problem session of the Edinburgh meeting on additive combinatorics (2024), Noah Kravitz asked how large a subset $A \subseteq \mathbb{F}_p$ can be such that $A + A - 2A \neq \mathbb{F}_p$. Here λA the dilate of the set A by the factor λ

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\},$$

and $A + A - 2A$ is the sumset

$$A + A - 2A = \{a_1 + a_2 - 2a_3 : a_1, a_2, a_3 \in A\}.$$

The Cauchy-Davenport theorem implies that for $p/3 < |A|$ one has $A + A - 2A = \mathbb{F}_p$, but the constant $c = 1/3$ is not optimal. From the other direction one can see that if A is an interval of length $\approx p/4$, then $A + A - 2A \neq \mathbb{F}_p$.

The goal is to study various choices of coefficients and explore lower and upper bounds of the critical size.

2 Analytic properties of the Tutte polynomial

Tutte polynomial $T_G(x, y)$ is a two-variable polynomial associated to a graph G (or more generally to a matroid M). For a graph $G = (V, E)$ with $v(G)$ it is defined as

$$T_G(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-v(G)},$$

where $k(A)$ denotes the number of connected components of the subgraph $G_A = (V, A)$.

There are many excellent surveys on the properties of the Tutte polynomial and its applications [1, 2, 3, 5] or the book [4].

The Tutte polynomial enumerates various combinatorial objects: for a connected graph G :

- $T_G(1, 1)$ is the number of spanning trees of the graph G ,
- $T_G(2, 1)$ is the number of spanning forests of the graph G ,
- $T_G(1, 2)$ is the number of connected subgraphs of the graph G ,
- $T_G(2, 0)$ is the number of acyclic orientations of the graph G ,
- $T_G(0, 2)$ is the number of strongly connected orientations of the graph G .

It is also related to the Ising, Potts and Fortuin-Kasteleyn models in statistical physics. Despite the connection with combinatorics and statistical physics we know very few things about its analytical properties.

Below I collected a few conjectures whose proof I would like to know. To motivate the first two conjectures the following picture shows the zeros of the polynomial $T_G(x, 1)$ for the Tutte-Coxeter graph. This graph is a 3-regular graph on 30 vertices whose shortest cycle has length 8. One can see that all zeros have absolute value at most 2, but they are all very close to 2.

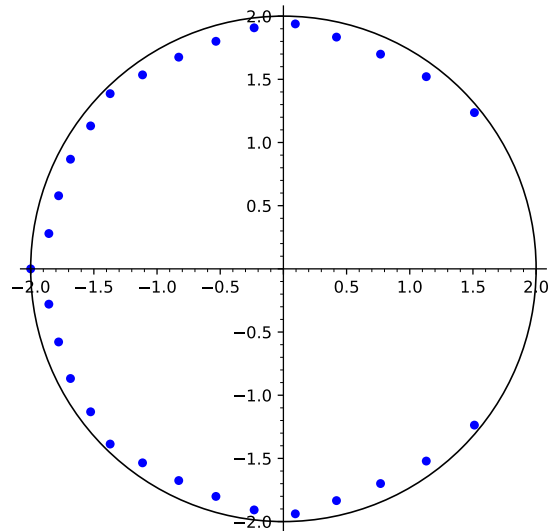


Figure 1: Complex zeros of $T_G(x, 1)$, where G is the Tutte-Coxeter graph and a circle around 0 with radius $\Delta(G) - 1$.

Conjecture 1. Let G be a graph with maximum degree d . Suppose that $T_G(\xi, 1) = 0$. Then $|\xi| \leq d - 1$.

The tightness of the above conjecture is also a problem. The girth of a graph is the length of the shortest cycle. A graph sequence is called large girth if the girths tend to infinity.

Conjecture 2. Suppose that $(G_n)_n$ is a sequence of 2-edge-connected d -regular large girth graphs. Then the zeros of $T_{G_n}(x, 1)$ converge to the circle of radius $d - 1$ on the complex plane.

Another set of conjectures deal with something that we call rectangle correlation inequalities.

Conjecture 3. Let $0 \leq x_1 \leq x_2$ and $0 \leq y_1 \leq y_2$. Then for any graph G we have

$$T_G(x_2, y_1)T_G(x_1, y_2) \geq T_G(x_1, y_1)T_G(x_2, y_2).$$

The above conjecture follows from the stronger statement below that might have some interesting combinatorial proof.

Conjecture 4. Let

$$T_G(x_2, y_1)T_G(x_1, y_2) - T_G(x_1, y_1)T_G(x_2, y_2) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)S_G(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Then $S_G(x_1, x_2, y_1, y_2)$ has only non-negative coefficients.

References

- [1] Thomas Brylawski and James Oxley. The Tutte polynomial and its applications. *Matroid applications*, 40:123–225, 1992.
- [2] Henry H. Crapo. The Tutte polynomial. *Aequationes Mathematicae*, 3(3):211–229, 1969.
- [3] Joanna A. Ellis-Monaghan and Criel Merino. Graph polynomials and their applications i: The Tutte polynomial. In *Structural analysis of complex networks*, pages 219–255. Springer, 2011.

- [4] Joanna A. Ellis-Monaghan and Iain Moffatt. *Handbook of the Tutte polynomial and related topics*. CRC Press, 2022.
- [5] Dominic Welsh. The Tutte polynomial. *Random Structures & Algorithms*, 15(3-4):210–228, 1999.

3 Helly-típusú tételek konvex geometriákban

A kiindulási pontunk a következő, \mathbb{R}^d -beli konvex halmazokról szóló eredmények.

Helly tétele: Ha konvex halmazok egy véges \mathcal{F} családjában bármely $d + 1$ halmaz metszete nem üres, akkor $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Radon tétele: Bármely $d + 2$ pontból álló $S \subset \mathbb{R}^d$ halmaz felosztható két diszjunkt részhalmazra, $S_1 \cup S_2 = S$, úgy, hogy $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$, azaz hogy a részhalmazok konvex burkainak nem üres a metszete.

Színes Helly tétel: Ha adott $d + 1$ darab halmazcsalád, $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{d+1}$, és minden $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_{d+1} \in \mathcal{F}_{d+1}$ választásra teljesül, hogy $\bigcap A_i \neq \emptyset$, akkor létezik olyan i , hogy $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$.

Hasonló eredmények igazak tengelypárhuzamos téglákra, vagy egy matroid zárt halmazaira, stb. Ez motiválja a következő általános definíciót.

Egy (X, \mathcal{C}) párost **konvexitási térnek** nevezünk, ha a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ család (a “konvex halmazok”) teljesíti az alábbiakat:

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$ és $X \in \mathcal{C}$.
2. \mathcal{C} metszetzárt, azaz tetszőleges $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ esetén $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

Jelölje $h(X, \mathcal{C})$ Helly-számot, azaz a legkisebb h számot amire teljesül, hogy ha $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ konvex halmazok egy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ családjára, akkor van olyan $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, $|\mathcal{F}'| \leq h$ részcsalád, amire $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$. Hasonlóan definiálható az $r(X, \mathcal{C})$ Radon-száma és az $s(X, \mathcal{C})$ színes Helly száma egy konvexitási térnek.

Ismert Levi eredménye, miszerint a Radon-szám korlátozza a Helly-számot, azaz $h \leq r - 1$. Azonban a színes Helly-szám nem korlátozható az Euklideszi esetet általánosító módon. Például \mathbb{R}^d -ben a tengelypárhuzamos téglák esetén a Helly-szám 2, míg a Radon-szám $\Theta(\log d)$, a színes Helly-szám pedig $d + 1$. Valószínű, hogy ez a lehető legnagyobb eltérés a Radon-szám és a színes Helly-szám között konvexitási terekben, és $s \leq 2^{r-1} - 1$ mindig igaz, de a jelenleg ismert legjobb felső korlát nagyjából $s \leq r^{\log r}$. Konvexitási terek Helly-típusú invariánsairól jó összefoglalást ad [2].

Az első kérdés az lehetne, hogy bizonyítható-e az Euklideszi esethez hasonló $s \leq r - 1$, ha a konvexitási terek nagyon általános definíciójához hozzávesszük a következő axiómát. Egy konvexitási teret **konvex geometriának** nevezünk, ha teljesíti az **anti-exchange axiómát**: Ha $C \in \mathcal{C}$ és $x, y \in X \setminus C$ két különböző pont, akkor:

$$x \in \text{conv}(C \cup \{y\}) \implies y \notin \text{conv}(C \cup \{x\}).$$

Ez az axióma biztosítja többek között, hogy a konvex halmazoknak jól definiált ”extremális pontjaik” legyenek, hasonlóan az euklideszi térhez. Konvex geometriákhoz jó bevezető [1].

Konvexitási terek Helly-típusú invariánsaival kapcsolatban sok új eredmény született az elmúlt években. Ezek jó részét még nem vizsgáltuk konvex geometriák esetén, tehát a [2] surveyben szereplő nagyjából bármelyik eredményt, vagy kérdést érdekes lenne megnézni, nem csak az itt kifejtett színes Helly és Radon szám kérdését.

References

- [1] P. H. Edelman and R. E. Jamison. The theory of convex geometries. *Geometriae Dedicata*, 19(3):247–270, 1985.
- [2] A. F. Holmsen. Helly type problems in convexity spaces. *arXiv preprint arXiv:2408.05871*, 2024.

Study topics

4 Konvex Geometria (Naszódi Márton, Böröczky Károly)

Az d -dimenziós konvex testek izgalmas, sokszor a 2- és 3-dimenziós intuíciónknak meglepő módon ellentmondó elméletével fogunk ismerkedni, amit ugyanúgy motivál a téma szépsége, mint az ismeretek alkalmazhatósága. Beszélünk majd a metszet-struktúrájukról (Helly-típusú tételek), a mérték-koncentrációról (Dvoretzky tétele konvex halmazok gömbszerű metszetéről), és arról, hogy hányféle térfogathoz hasonló mennyiséggel lehet őket mérni (Brunn–Minkowski-elmélet).

Feltételezzük alapvető lineáris algebrai fogalmak (vektortér, lineáris leképezés) ismeretét, és az egyváltozós analízis alapjait (deriválás, integrálás), minden mást a szükséges mértékben bevezetünk.

5 Algebraic curves - a topological perspective (Némethi András)

Algebraic curves is an area of mathematics that is fundamental in topology, complex analysis, number theory and differential geometry via Riemann Surfaces, especially elliptic curves, and, in turn, widely applied, for example, in cryptography and robotics, or in string theory. The Summer School concentrates on topological aspects, like classification and the genus formula for projective curves, algebraic knots and links, algebraic plane curve singularities, monodromy, Milnor number and fibers.

6 Markov láncok kvantumos általánosításai - Quantum generalizations of Markov chains (Gilyén András)

A Markov-lánc Monte-Carlo típusú algoritmusok sok elméleti és gyakorlati alkalmazásban játszanak kulcsszerepet, kiváltképp a Metropolis algoritmus és Glauber dinamika. Ezen módszerek friss kvantumos általánosításai új elméleti kérdéseket vetnek fel, Markov láncok kvantumos általánosításainak keverési idejéről, mintavételezésről, statisztikus fizikai modellek viselkedéséről.

Markov chain Monte Carlo type algorithms play a key role in many theoretical and practical applications, especially the Metropolis algorithm and Glauber dynamics. Recent quantum generalizations of these methods raise new theoretical questions about the mixing time of these generalizations, applications to quantum sampling, and the behavior of quantum statistical physics models.